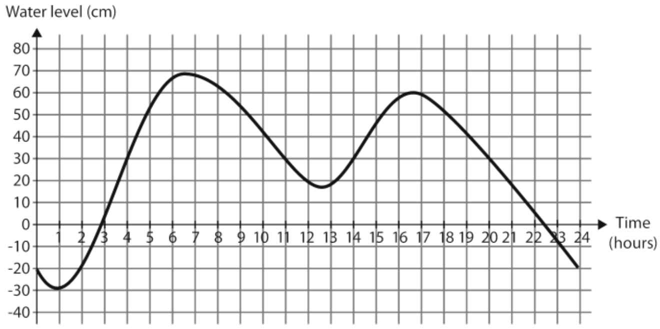
Jeu-concours International
Kangourou des mathématiques

11$^{\text{ème}}$ et 12$^{\text{ème}}$ années

Partie A: Chaque bonne réponse vaut 3 points.

1. Au cours d'une journée, le niveau de l'eau dans le port d'une ville monte et descend tel qu'illustré sur cette figure. Pendant combien d'heures le niveau de l'eau était-il au dessus de 30 cm cette journée là?



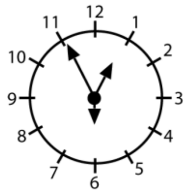
(A) 5 (B) 6 (C) 7
(D) 9 (E) 13

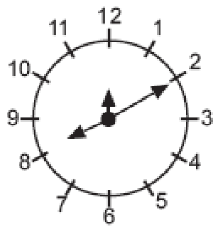
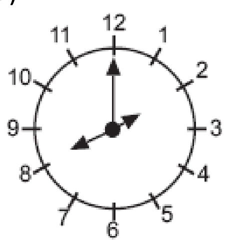
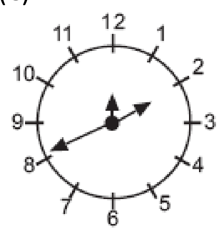
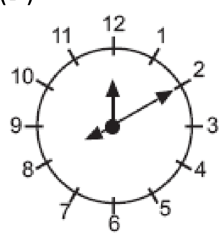
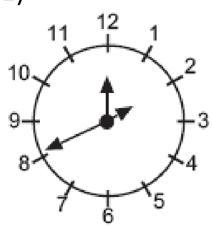
2. Dans une liste de cinq nombres, le premier nombre est 2 et le dernier nombre est 12. Le produit des trois premiers nombres est 30, le produit des trois nombres du milieu est 90 est le produit des trois derniers nombres est 360. Quel nombre est au centre de cette liste?

2				12

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 10

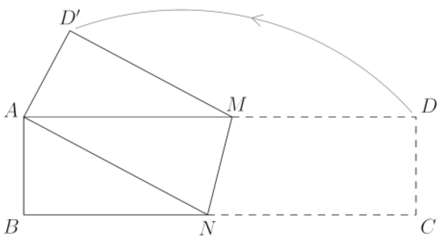
3. Une horloge a 3 aiguilles de différentes longueurs (pour les heures, les minutes et les secondes). On ne sait pas quelle aiguille est laquelle, mais l'on sait que l'horloge affiche la bonne heure. À 12h55m30s, les aiguilles sont dans la position affichée. Quelle image montre l'horloge à 8h10m00s?



(A)

(B)

(C)

(D)

(E)


4. Le cube du nombre a vaut 2012^{12}. Quel est le produit du nombre a et du carré du nombre 2012^{11} ?
(A) 2012^{58} (B) 2012^{26} (C) 2012^{88} (D) 2012^{15} (E) 2012^{12}

5. Un morceau de papier rectangulaire $ABCD$ mesurant 4cm x 16cm est plié le long de la ligne MN de sorte que le sommet C coïncide avec le sommet A, tel que montré dans cette figure. Quelle est l'aire du quadrilatère $ANMD'$?



(A) 28 cm^2 (B) 30 cm^2 (C) 32 cm^2
(D) 48 cm^2 (E) 56 cm^2

6. Chaque matin, cinq gentilles policières Anna, Bea, Clara, Dana et Ella marchent en file à la station de police exactement dans cet ordre. En se rendant au vestiaire à l'autre extrémité de l'édifice il y a 8 portes. À chaque porte, la première policière tient la porte ouverte pendant que les autres passent. Qui ouvre la dernière porte?
(A) Anna (B) Bea (C) Clara (D) Dana (E) Ella

7. La valeur maximale de l'entier n, pour lequel $n^{200} < 5^{300}$, est égale à:
(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 11 (E) 12

8. Une suite d'opérations est montrée dans ce diagramme.
Combien y-a-t-il de valeurs possibles pour le nombre N?

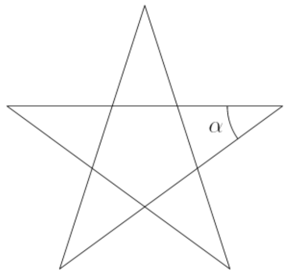
$$\boxed{1} \xrightarrow{+N} \square \xrightarrow{\text{x}N} \square \xrightarrow{-N} \square \xrightarrow{:N} 5$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) une infinité de valeurs

9. Laquelle des fonctions suivantes satisfait l'équation $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$?

(A) $f(x) = \frac{2}{x}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (C) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (D) $f(x) = \frac{1}{x}$ (E) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

10. Quelle est la grandeur de l'angle α d'une étoile régulière à 5 branches?



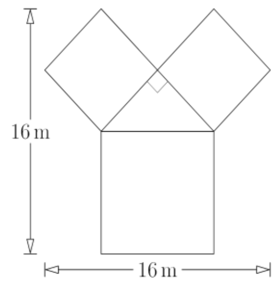
(A) 24° (B) 30° (C) 36°
(D) 45° (E) 72°

<u>Partie B : Chaque bonne réponse vaut 4 points</u>

11. Mon âge est un nombre à deux chiffres, qui est une puissance de 5, et l'âge de mon cousin est un nombre à deux chiffres qui est une puissance de 2. La somme des chiffres de nos âges est un nombre impair. Quel est le produit des chiffres de nos âges?
(A) 240 (B) 2010 (C) 60 (D) 50 (E) 300

12. Une agence de voyage a organisé quatre excursions optionnelles de la Sicile pour un groupe de touristes. Le taux de participation à chaque excursion était de 80%. Quel est le plus petit pourcentage possible des touristes qui ont pris part aux quatre excursions?
(A) 80% (B) 60% (C) 40% (D) 20% (E) 16%

13. Cette figure montre le plan d'un jardin de roses. Des roses blanches poussent dans les deux carrés égaux et des roses rouges poussent dans le troisième carré. Des roses jaunes poussent dans le triangle à angle droit. La longueur et la largeur du jardon sont 16 m chacune. Quelle est l'aire du jardin de roses?



(A) 114 cm^2 (B) 130 cm^2 (C) 144 cm^2
(D) 160 cm^2 (E) 186 cm^2

14. Soit un polygone à 2012 côtés. Combien y a-t-il de triangles équilatéraux ayant leurs sommets parmi les sommets du polygone?

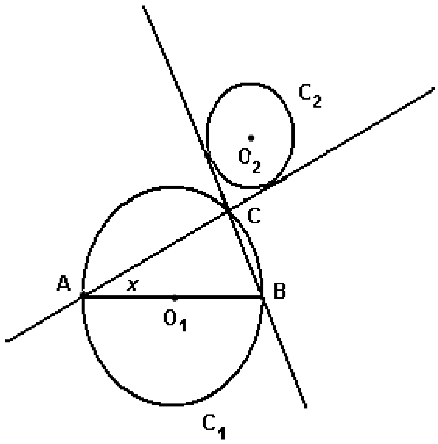
(A) 1 (B) 1006 (C) 2012 (D) $\frac{2012 \times 2011}{2}$ (E) une réponse différente

15. Les écoles en Slovaquie sont classées en 5 catégories allant de 1 (la meilleure) jusqu'à 5. Dans une école slovaque, un test dans une classe de 4è année n'a pas donné de bons résultats. La note moyenne était 4. Les garçons ont fait légèrement mieux; leur note moyenne était 3.6 alors que la note moyenne des filles était 4.2.
Quel énoncé suivant est vrai à propos de la classe?
(A) Il y a deux fois plus de garçons que de filles (B) Il y a 4 fois plus de garçons que de filles
(C) Il y a deux fois plus de filles que de garçons (D) Il y a 4 fois plus de filles que de garçons
(E) Il y a autant de garçons que de filles

16. Tous les billets de la première rangée d'un cinéma ont été vendus. Les sièges sont numérotés consécutivement à partir de 1. Un billet supplémentaire fut vendu par erreur. La somme des numéros des sièges pour tous les billets vendus pour cette rangée est égale à 857. Quel est le numéro du siège pour lequel deux billets ont été vendus?

(A) 4 (B) 16 (C) 25 (D) 37 (E) 42

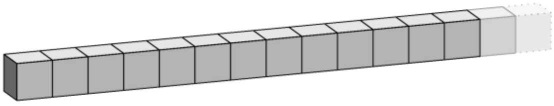
17. Les cercles C_1 et C_2 sont centrées sur O_1 et O_2 respectivement. AB est le diamètre de C_1; C est un point sur C_1; C_2 est tangent aux droites AC and BC, and $\angle BAC=x$. Quel est la valeur de l'angle O_2CO_1?



(A) $180°$ (B) $180° - \frac{x}{2}$ (C) $135° + x$

(D) $135° - x$ (E) Cela dépend sur les rayons des cercles

18. Un kangourou veut assembler une rangée de dés réguliers (les faces opposées d'un dé régulier ont un total de 7 points). Il peut coller deux faces ensembles si elles ont le même nombre de points. Il voudrait que le nombre total de points sur les faces extérieurs des dés soit 2012.
Combien de dés a-t-il besoin?

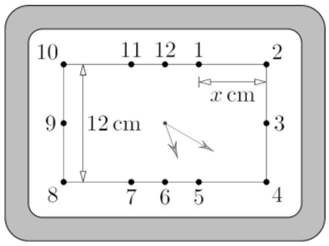


(A) 70 (B) 71 (C) 142 (D) 143 (E) Un total de 2012 points est impossible

19. Un carré $ABCD$ a des côtés de longueur 2. E et F sont les points milieux des côtés AB et AD respectivement. G est un point sur CF de sorte que $3CG=2GF$. Quelle est l'aire du triangle BEG?

(A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{6}{5}$

20. L'horloge dans cette image a une forme rectangulaire mais chaque aiguille se déplace à vitesse constante, comme une horloge normale. La distance entre les nombres 8 et 10 sur le cadran est 12 cm et la distance entre 1 et 2 est x cm. Quelle est la valeur de x?

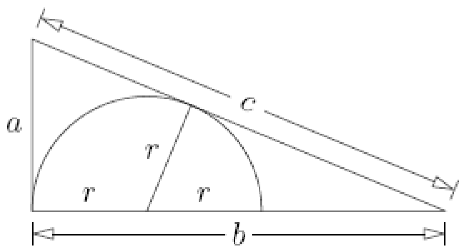


(A) $3\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$

(D) $2+\sqrt{3}$ (E) $12-3\sqrt{3}$

<u>Partie C : Chaque bonne réponse vaut 5 points.</u>

21. Soit un triangle à angle droit dont les côtés ont pour longueur a, b et c. Quel est le rayon r du demi-cercle inscrit, tel que montré dans cette figure?



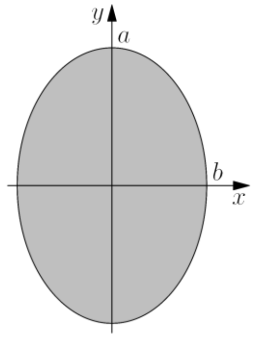
(A) $\frac{a(c-a)}{2b}$ (B) $\frac{ab}{a+b+c}$ (C) $\frac{ab}{b+c}$

(D) $\frac{2ab}{a+b+c}$ (E) $\frac{ab}{a+c}$

22. Soient deux opérations que l'on peut effectuer sur une fraction : 1) ajouter 8 au numérateur, 2) ajouter 7 au dénominateur. Si l'on débute avec la fraction $\frac{7}{8}$ et que l'on effectue n opérations, dans un ordre quelconque, on obtient alors une fraction de valeur égale. Quelle est la plus petite valeur possible de n?

(A) 56 (B) 81 (C) 109 (D) 113 (E) C'est impossible

23. Soit $a > b$. Si l'on fait tourner l'ellipse ci-contre autour de l'axe x, on obtient un ellipsoïde E_x de volume $Vol(E_x)$. Si l'on fait tourner l'ellipse autour de l'axe y, on obtient l'ellipsoïde E_y de volume $Vol(E_y)$.
Lequel des énoncés suivants est vrai?



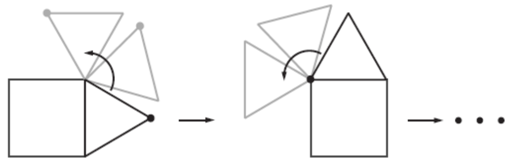
(A) $E_x = E_y$ et $Vol(E_x) = Vol(E_y)$
(B) $E_x \neq E_y$ et $Vol(E_x) > Vol(E_y)$
(C) $E_x = E_y$ et $Vol(E_x) \neq Vol(E_y)$
(D) $E_x \neq E_y$ et $Vol(E_x) < Vol(E_y)$
(E) $E_x \neq E_y$ mais $Vol(E_x) = Vol(E_y)$

24. Combien de solutions y a-t-il à ce système d'équations?

$$|x|+|y|=1$$
$$x^2-y^2=1$$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 0

25. Un triangle équilatéral tourne sans glisser autour d'un carré ayant des côtés de longueur 1 (voir l'illustration). Quelle est la longueur du parcours tracé par le point noir lorsque le triangle et le point reviennent à leurs positions initiales ?



(A) 4π (B) $\frac{28}{3}\pi$ (C) 8π (D) $\frac{14}{3}\pi$ (E) $\frac{21}{2}\pi$

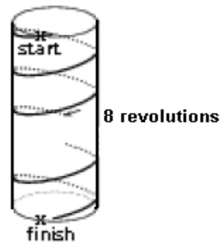
26. Après un cours d'algèbre, ceci fut laissé au tableau: le graphique de la fonction $y=x^2$ et 2012 droites parallèles à la droite $y=x$, où chacune d'elles coupe la parabole en deux points. Quelle est la somme des coordonnées x des points d'intersection des droites et de la parabole?

(A) 0 (B) 1 (C) 109 (D) 1006 (E) 2012

27. Combien de permutations (x_1, x_2, x_3, x_4) de l'ensemble d'entiers {1, 2, 3, 4} ont la propriété que la somme $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$ est divisible par 3?

(A) 8 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 24

28. Une famille écureuil habite à 15 m au-dessus du sol, dans la végétation luxuriante d'un vieil arbre dont le tronc a 1 m de circonférence. Aujourd'hui, Stig, le plus jeune des écureuils se pratique à descendre le long du tronc. Papa écureuil montre à Stig l'esquisse du tronc et lui donne le conseil suivant : « Garde ta vitesse constante et le même angle par rapport au sol, et assure-toi de faire 8 révolutions autour du tronc ». Stig trouve que ce parcours est beaucoup plus long que juste descendre au sol verticalement. Combien est-ce plus long au juste?



(A) 1m (B) 2m (C) 3m (D) 4m (E) 5m

29. Dans la séquence $1, 1, 0, 1, -1, \ldots$, les deux premiers termes a_1 et a_2 valent 1. Le troisième terme est la différence des deux termes précédents, c.-à-d., $a_3=a_1-a_2$. Le quatrième terme est la somme des deux termes précédents, c.-à-d., $a_4=a_2+a_3$. Alors $a_5=a_3-a_4$, $a_6=a_4+a_5$, et ainsi de suite. Quelle est la somme des cent premiers termes de cette suite?

(A) 0 (B) 3 (C) -21 (D) 100 (E) -1

30. Ioana choisit deux nombres a et b parmi l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$. Leur produit ab est égal à la somme des 24 nombres restants. Quelle est la valeur de $|a-b|$?

(A) 10 (B) 9 (C) 7 (D) 2 (E) 6