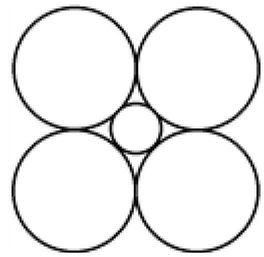
Jeu-concours international
KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

<u>Partie A: Chaque bonne réponse vaut 3 points.</u>

1. Lequel de ces nombres est le plus grand?

(A) 2013 (B) 2^{0+13} (C) 20^{13} (D) 201^3 (E) $20 \cdot 13$

2. Quatre cercles de rayon 1 se touchent ensemble et un plus petit cercle est visible dans la figure.



Quel est le rayon du plus petit cercle?

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{7}{16}$

3. Un objet à trois dimensions limité seulement par des polygones est appelé polyèdre. Quel est le plus petit nombre de polygones qui peuvent limiter un polygone en un polyèdre si l'on sait que l'un d'eux a 12 côtés?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 16 (E) 24

4. La racine cubique de 3^{3^3} est égale à

(A) 3^3 (B) 3^{3^3-1} (C) 3^{2^3} (D) 3^{3^2} (E) $(\sqrt{3})^3$

5. L'année 2013 a la particularité que ce nombre est formé des chiffres consécutifs 0, 1, 2 et 3. Combien d'années s'est-il écoulé depuis la dernière fois qu'une année fut formée de 4 nombres consécutifs ?

(A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

6. Soit f une fonction linéaire pour laquelle $f(2013) - f(2001) = 100$.
Que vaut $f(2031) - f(2013)$?

(A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180

7. Étant donné que $2 < x < 3$, alors parmi les énoncés suivants combien sont vrais?

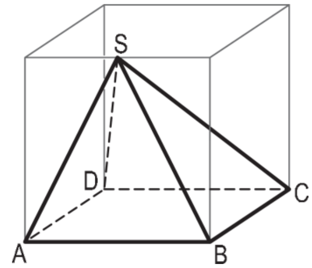
$4 < x^2 < 9$ $4 < 2x < 9$ $6 < 3x < 9$ $0 < x^2 - 2x < 3$

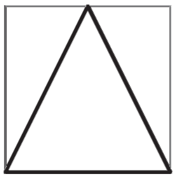
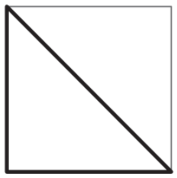
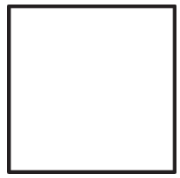
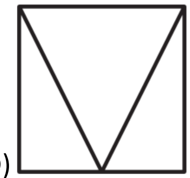
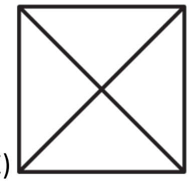
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

8. Six super-héros capturent 20 méchants. Le premier super-héros capture un méchant, le deuxième capture deux méchants et le troisième capture trois méchants. Le quatrième super-héros capture plus de méchants que n'importe quel des cinq autres. Quel est le plus petit nombre de méchants que le quatrième super-héros doit avoir capturé?

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

9. Dans le cube ci-dessous, vous apercevez une pyramide solide non-transparente de base $ABCD$ et dont le sommet S se situe exactement au milieu d'une arête du cube. Vous observez cette pyramide par le dessus, par le dessous, par l'arrière, par le devant, par la droite et par la gauche. Quelle vue n'apparaîtra pas?

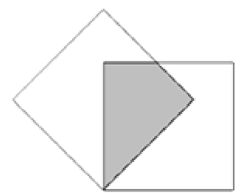


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Lorsqu'une certaine substance fond, son volume s'accroît de $\frac{1}{12}$.
De combien sont volume décroît-il lorsqu'elle se solidifie à nouveau?
(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

<u>Partie B: Chaque bonne réponse vaut 4 points.</u>

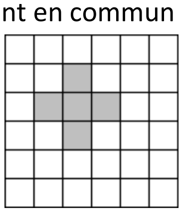
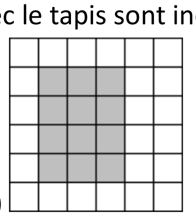
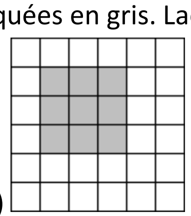
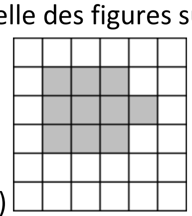
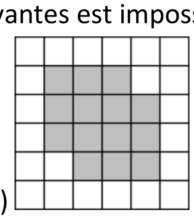
11. Ce diagramme montre deux carrés de côtés égaux qui sont placés de manière à se chevaucher. Les carrés se touchent en un sommet commun et les côtés forment un angle de 45° l'un par rapport à l'autre. Quelle est l'aire de la partie qui se chevauche, lorsqu'exprimée comme une fraction de l'aire d'un carré?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{2}-1$ (E) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

12. Combien d'entiers positifs n existe-t-il de sorte que $\frac{n}{3}$ et $3n$ soient des entiers à trois chiffres?
(A) 12 (B) 33 (C) 34 (D) 100 (E) 300

13. Un tapis circulaire est déposé sur un plancher de tuiles carrées. Toutes les tuiles qui ont plus d'un point en commun avec le tapis sont indiquées en gris. Laquelle des figures suivantes est impossible?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. Soit la proposition suivante à propos de la fonction f sur l'ensemble des entiers:
"Pour tout x pair, $f(x)$ est pair." Quel serait la négation de cette proposition?
(A) Pour tout x pair, $f(x)$ est impair (B) Pour tout x impair, $f(x)$ est pair

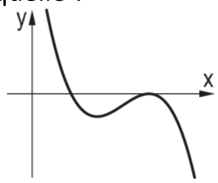
(C) Pour tout x impair, $f(x)$ est impair (D) Il existe un nombre pair x tel que $f(x)$ est impair

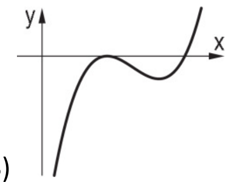
(E) Il existe un nombre impair x tel que $f(x)$ est impair

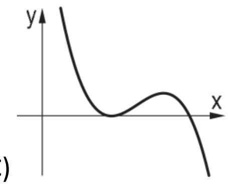
15. Combien de couples d'entiers positifs (x, y) satisfont l'équation $x^2y^3 = 6^{12}$?

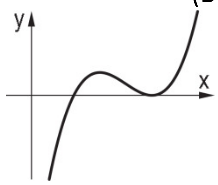
(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) Un autre nombre.

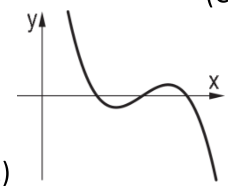
16. Soit la fonction $W(x) = (a-x)(b-x)^2$, où $a < b$. Son graphe est l'une des figures suivantes. Laquelle ?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

17. Soit un rectangle dont l'un des côtés a une longueur égale à 5. Ce rectangle peut être découpé en un carré et un rectangle, l'un des deux ayant une superficie de 4. Combien existe-il de ces rectangles ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

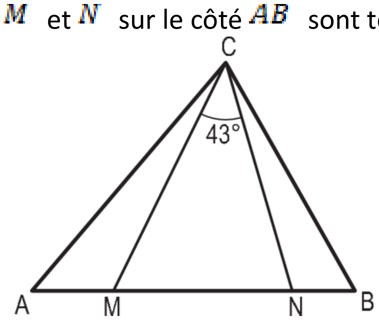
18. Supposons que $x^2 - y^2 = 84$, où x et y sont des entiers positifs.

Combien de valeurs l'expression $x^2 + y^2$ peut-elle avoir?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

19. Dans le triangle ABC , les points M et N sur le côté AB sont tels que $AN = AC$ et $BM = BC$.

Trouvez $\angle ACB$ si $\angle MCN = 43°$.



(A) $86°$ (B) $89°$ (C) $90°$ (D) $92°$ (E) $94°$

20. Une boîte contient 900 cartes numérotées de 100 à 999. Toutes les cartes ont un nombre différent. François choisit quelques cartes et calcule la somme des chiffres sur chacune d'elle. Combien de cartes doit-il choisir, au minimum, pour être certain d'avoir trois cartes ayant la même somme?

(A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55

Partie C: Chaque bonne réponse vaut 5 points.

21. Combien existe-t-il de couples d'entiers (x, y), où $x \leq y$, ayant un produit égal à 5 fois leur somme?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

22. Soit $f: R \rightarrow R$ une fonction définie par les propriétés suivantes: f est périodique avec période 5 et la restriction de f sur l'intervalle $[-2,3)$ est $f(x) = x^2$. Que vaut $f(2013)$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

23. Nous avons plusieurs cubes blancs et plusieurs cubes noirs, tous de même taille. On veut construire un cuboïde composé de 2013 de ces cubes exactement de sorte qu'un cube blanc alterne avec un cube noir, et ce, dans toutes les directions. Si l'on commence en plaçant un cube noir dans l'un des huit coins du cuboïde, combien de carrés noirs pourra-t-on apercevoir sur la surface externe du cuboïde ?
(A) 887 (B) 888 (C) 890 (D) 892 (E) Ça dépend des dimensions du cuboïde

24. Combien de solutions (x, y), où x et y sont des nombres réels, l'équation $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ a-t-elle?
(A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) Nombre infini.

25. Soient 2013 points dispersés à l'intérieur d'un carré. Certains d'entre deux sont reliés aux sommets du carré et à d'autres points de sorte que le carré se trouve divisé en plusieurs triangles qui ne se chevauchent pas. Tous les points sont des sommets de ces triangles. Combien de triangles sont alors formés de cette manière?
(A) 2013 (B) 2015 (C) 4026 (D) 4028 (E) Impossible à déterminer

26. Quelques lignes droites sont tracées sur le plan. La ligne a intersecte exactement trois autre lignes et la ligne b intersecte exactement quatre autre lignes. La ligne c intersecte exactement n autre lignes, où $n \neq 3,4$. Trouvez le nombre de lignes dessinées sur le plan.
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) Un autre nombre.

27. La somme des n premiers entiers positifs est un nombre à trois chiffres identiques. Quelle est la somme des chiffres de n ?
(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

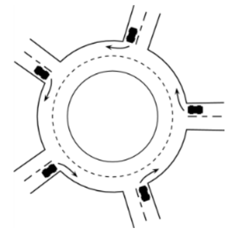
28. Sur l'île des Knights et des Knaves vivent seulement deux types de personnes: les Knights (qui disent toujours la vérité) et les Knaves (qui mentent toujours). J'ai rencontré deux hommes qui habitent cette île et j'ai demandé au plus grand s'ils étaient tous deux des Knights. Il a répondu mais je n'ai pas pu déterminer ce qu'ils étaient. J'ai alors demandé au petit homme si le plus grand était une Knight. Il m'a répondu et j'ai pu alors déterminer de quel type ils étaient.
Est-ce que les hommes étaient des Knights ou des Knaves?

(A) Ils étaient tous deux des Knights.
(B) Ils étaient tous deux des Knaves.
(C) Le plus grand était un Knight et le plus petit un Knave.
(D) Le plus grand était un Knave et le plus petit un Knight.
(E) Il n'y a pas suffisamment d'information pour y répondre.

29. Julian a écrit un algorithme afin de créer une séquence de nombres telle que $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, où m et n sont des entiers naturels. Trouvez la valeur de a_{100} .

(A) 100 (B) 1000 (C) 2012 (D) 4950 (E) 5050

30. Cinq voitures entrent simultanément dans un rond-point, à partir de différentes directions, tel que montré dans ce diagramme. Aucune voiture ne fait un tour complet du rond-point et deux voitures ne quittent jamais le rond-point par la même sortie. Combien y a-t-il de combinaisons possibles pour que les voitures quittent le rond-point?



(A) 24 (B) 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120