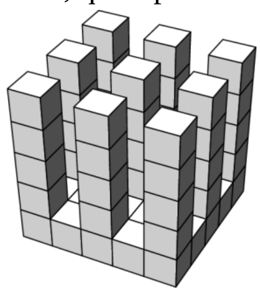
Concours canadien
KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

Partie A: Chaque bonne réponse vaut 3 points

1. Si on enlève plusieurs cubes $1 \times 1 \times 1$ d'un cube $5 \times 5 \times 5$, on obtient un solide constitué de colonnes de la même hauteur, qui reposent sur une base (voir la figure).



Combien de petits cubes ont été enlevés?

(A) 56 (B) 60 (C) 64 (D) 68 (E) 80

2. Carla, Emilie et Lilia célèbrent leur anniversaire aujourd'hui. La somme de leurs âges est maintenant 44. Quelle sera la somme de leurs âges, la prochaine fois que cette somme sera un nombre à deux chiffres identiques?

(A) 55 (B) 66 (C) 77 (D) 88 (E) 99

3. Les nombres entiers positifs a et b satisfont l'équation $a^2 + b^2 = 100$. Trouvez la valeur de $a + b$?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

4. Si $a^b = \frac{1}{2}$ quelle est la valeur de a^{-3b} ?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) 8 (C) -8 (D) 6 (E) $\frac{1}{6}$

5. On a 48 boules dans trois paniers de tailles différentes. Le plus petit panier et le plus grand panier contiennent ensemble le double du nombre de boules du panier de taille moyenne. Le plus petit panier contient la moitié du nombre de boules du panier de taille moyenne. Combien y a-t-il de boules dans le plus grand panier?

(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 32

6. Combien y a-t-il de chiffres dans le résultat de la multiplication: $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?

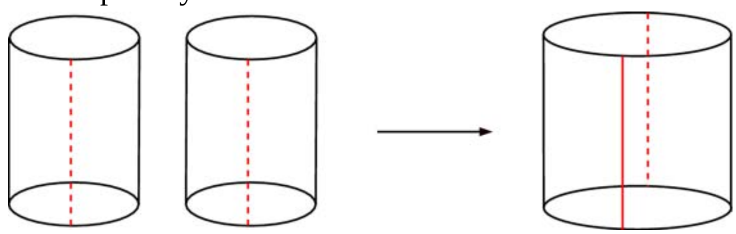
(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 (E) 111

Copyright © Concours canadien Kangourou des mathématiques, 2014. Tous droits réservés.
Ce matériel peut être reproduit seulement avec la permission du Concours canadien Kangourou des mathématiques.

7. Le beau Harry a une adresse courriel secrète que seule quatre de ses amies connaissent. Aujourd'hui il a reçu huit courriels. Lequel des énoncés suivants est assurément vrai?

(A) Harry a reçu deux courriels de chaque amie;
(B) Harry ne peut pas avoir reçu huit courriels d'une seule de ses amies;
(C) Harry a reçu au moins un courriel de chacune de ses amies;
(D) Harry a reçu au moins deux courriels d'une de ses amies;
(E) Harry a reçu au moins deux courriels de 2 amies différentes.

8. Deux cylindres identiques sont découpés le long des lignes pointillées, puis collés ensemble pour former un plus gros cylindre – voir la figure. Que peut-on dire du volume du gros cylindre par rapport au volume d'un petit cylindre?



(A) Il a le double du volume. (B) Il a 3 fois son volume. (C) Il a π fois son volume.
(D) Il a 4 fois son volume. (E) Il a 8 fois son volume.

9. Dans le nombre 2014, les chiffres sont différents et le dernier chiffre est plus grand que la somme des trois autres chiffres. Combien d'années s'est-il écoulé depuis la dernière fois que c'est arrivé?

(A) 5 (B) 215 (C) 305 (D) 395 (E) 485

10. Un triangle isocèle a deux côtés de longueur 2. Quelle est la plus grande aire possible d'un tel triangle?

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{3}$

Partie B: Chaque bonne réponse vaut 4 points

11. Soit une boîte rectangulaire aux dimensions $a \times b \times c$, où $a < b < c$. Si on augmente a ou b ou c d'une certaine valeur positive, le volume de la boîte augmente aussi. Parmi les cas suivants, lequel procure la plus grande augmentation du volume de la boîte?

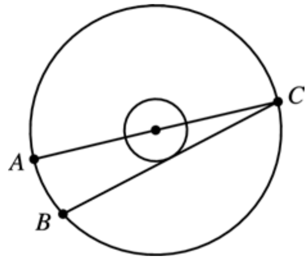
(A) Si on augmente a. (B) Si on augmente b. (C) Si on augmente c.
(D) L'augmentation du volume est la même dans A), B), C). (E) Ça dépend des valeurs de a, b, c.

12. Dans un match de soccer, le gagnant obtient 3 points, le perdant obtient 0 point, tandis que dans le cas d'un match nul chaque équipe obtient 1 point. Quatre équipes, A, B, C et D, participent à un tournoi de soccer. Chaque équipe joue trois matchs: un contre chacune des autres équipes. À la fin du tournoi, l'équipe A a 7 points, alors que B et C ont 4 points chacune. Combien de points a l'équipe D?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Copyright © Concours canadien Kangourou des mathématiques, 2014. Tous droits réservés.
Ce matériel peut être reproduit seulement avec la permission du Concours canadien Kangourou des mathématiques.

13. Les rayons de ces deux cercles concentriques ont un rapport de proportionnalité $1:3$.



AC est un diamètre du grand cercle; BC est une corde du grand cercle qui est tangente au plus petit cercle; et la longueur du segment AB est 12. Quel est le rayon du grand cercle?

(A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26

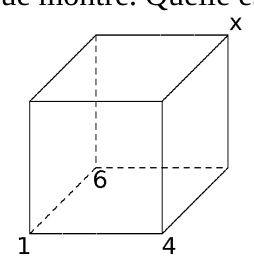
14. Combien de triplets (a, b, c) de nombres entiers où $a > b > c > 1$ satisfont $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > 1$?

(A) aucun (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) une infinité

15. Six semaines est $n!$ ($n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times n$) secondes. Quelle est la valeur de n?

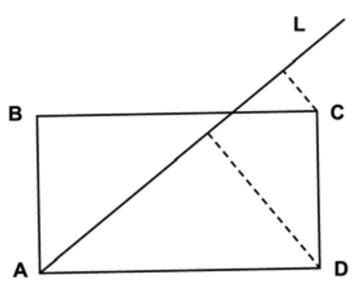
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12

16. Les sommets d'un cube sont numérotés de 1 à 8 de sorte que la somme des quatre nombres aux sommets d'une face est la même pour toutes les faces. Les numéros 1, 4 et 6 sont déjà inscrits sur certains sommets, tel que montré. Quelle est la valeur de x?



(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

17. La ligne L passe par le sommet A du rectangle $ABCD$. La distance du point C à L est 2, et la distance du point D à L est 6. Si AD est le double de AB, trouvez AD.



(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) $4\sqrt{3}$

Copyright © Concours canadien Kangourou des mathématiques, 2014. Tous droits réservés.
Ce matériel peut être reproduit seulement avec la permission du Concours canadien Kangourou des mathématiques.

18. La fonction $f(x) = ax + b$ satisfait les égalités $f(f(f(1))) = 29$, et $f(f(f(0))) = 2$. Quelle est la valeur de a?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

19. Le nombre de points d'intersection de quatre lignes droites distinctes dans un plan ne peut pas être égal à

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

20. Lequel des nombres suivants est divisible par 5?

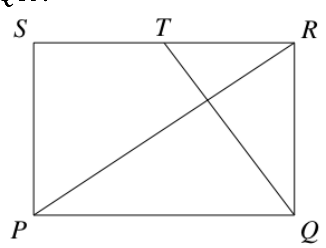
(A) $2^{100}+1$ (B) $2^{101}+1$ (C) $2^{102}+1$ (D) $2^{103}+1$ (E) $2^{104}+1$

Partie C: Chaque bonne réponse vaut 5 points

21. L'étiquette sur un paquet de fromage à la crème indique: 24% de matières grasses au total. La même étiquette indique également: 64% de matières grasses dans l'extrait sec. Quel est le pourcentage d'eau dans ce fromage?

(A) 88% (B) 62.5% (C) 49% (D) 42% (E) 37.5%

22. $PQRS$ est un rectangle. Le point T est le milieu de RS. QT est perpendiculaire à la diagonale PR. Quel est le rapport $PQ:QR$?

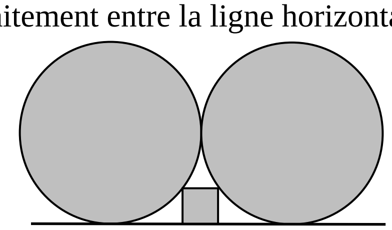


(A) $2:1$ (B) $\sqrt{3}:1$ (C) $3:2$ (D) $\sqrt{2}:1$ (E) $5:4$

23. Un clan de 9 kangourous se nomme Grandkangs. Leur fourrure est soit de couleur argent, soit de couleur or. Lorsque 3 Grandkangs se réunissent, il y a deux chances sur trois qu'aucun d'eux ne soit de couleur argent. Combien de Grandkangs sont de couleur or?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8

24. Un carré s'insère parfaitement entre la ligne horizontale et deux cercles tangents de rayon 1.



Quelle est la longueur de son côté?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{2}$

Copyright © Concours canadien Kangourou des mathématiques, 2014. Tous droits réservés.
Ce matériel peut être reproduit seulement avec la permission du Concours canadien Kangourou des mathématiques.

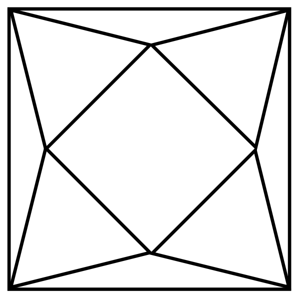
25. Tom veut écrire plusieurs nombres entiers positifs distincts, aucun d'eux n'étant supérieur à 100. Leur produit ne doit pas être divisible par 54. Combien de nombres entiers peut-il écrire, au plus?

(A) 8 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

26. Soient trois boîtes contenant chacune 1 boule blanche, 1 boule noire, 1 boule rouge et 1 boule bleue. Charles a les yeux bandés et il pige une boule dans chaque boîte. Quelle est la probabilité qu'exactement 2 des boules pigées soient rouges?

(A) 1/8 (B) 1/9 (C) 3/16 (D) 3/64 (E) 9/64

27. La figure montre quatre triangles équilatéraux et deux carrés.



Chaque triangle équilatéral a deux sommets qui coïncident avec les sommets du carré intérieur et un troisième sommet qui coïncide avec un sommet du carré extérieur. La superficie du carré intérieur est 1. Quelle est la superficie du carré extérieur?

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $2+\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $3+\sqrt{2}$ (E) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

28. On a 10 nombres entiers positifs distincts, dont 5, précisément, sont divisibles par 5, et 7, précisément, sont divisibles par 7. Soit M le plus grand des 10 nombres. Quelle est la plus petite valeur possible de M?

(A) 105 (B) 77 (C) 75 (D) 63 (E) aucune de celles-ci

29. Les égalités $k = (2014+m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$ sont données pour les nombres entiers positifs k, m, n. Combien de valeurs différentes m peut-il prendre?

(A) aucune (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) infinité

30. Deux polygones réguliers ayant des côtés de longueur 1 reposent de part et d'autre de leur côté commun AB. L'un d'eux est un 15-gone $ABCD$ ... et l'autre est un n-gone $ABZY$ .... Pour quelle valeur de n la distance CZ est-elle égale à 1?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

Copyright © Concours canadien Kangourou des mathématiques, 2014. Tous droits réservés.
Ce matériel peut être reproduit seulement avec la permission du Concours canadien Kangourou des mathématiques.